Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекции 25–28

§ 29. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

29.1. Понятие неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции $f(x)$ найти ее производную* (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$* (или дифференциал). Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)\,dx).$$

Например, первообразной функции $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Очевидно, что первообразными будут также любые функции

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

где C — постоянная, поскольку

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Теорема 29.1. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C — постоянное число.

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом от функции*** $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C.}$$

Здесь $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)\,dx$ — ***подынтегральным выражением***, x — ***переменной интегрирования***, $\int$ — ***знаком неопределенного интеграла***.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства) (см. рис. 165). График каждой первообразной (кривой) называется ***интегральной кривой***.

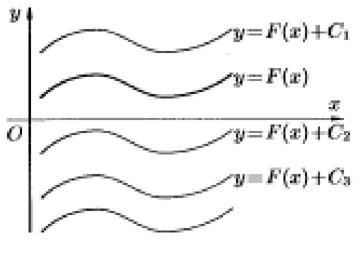

Рис. 165

Для всякой ли функции существует неопределенный интеграл?

Имеет место теорема, утверждающая, что «всякая непрерывная на $(a;b)$ функция имеет на этом промежутке первообразную», а следовательно, и неопределенный интеграл.

29.2. Свойства неопределенного интеграла

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \quad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

❑ Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$ ■

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ — постоянная.}$$

❑ Действительно,

$$\int af(x)\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int (aF(x))'\,dx = \int d(aF(x)) =$$

$$= a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a}\right) = a(F(x) + C) = a \int f(x)\,dx$$

$\left(\text{положили } \frac{C_1}{a} = C\right)$. ■

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

❑ Пусть x — независимая переменная, $f(x)$ — непрерывная функция и $F(x)$ — ее первообразная. Тогда $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Положим теперь $u = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция. Рассмотрим сложную функцию $F(u) = F(\varphi(x))$. В силу инвариантности формы первого дифференциала функции (см. с. 188) имеем

$$dF(u) = F'(u)\,du = f(u)\,du.$$

Отсюда $\int f(u)\,du = \int d(F(u)) = F(u) + C.$ ■

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Так, из формулы $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ путем замены x на u ($u = \varphi(x)$) получаем $\int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$. В частности,

$$\int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \ln^2 x\,d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Пример 29.1. Найти интеграл $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

❍ Решение:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$= 2\frac{x^5}{5} + C_1 - 3\frac{x^3}{3} + C_2 + \frac{x^2}{2} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$. ●

Таблица основных интегралов

1. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C;$

4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \qquad \left(\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C\right);$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \qquad \left(\int \operatorname{ch} u\,du = \operatorname{sh} u + C\right);$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C\right);$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

§ 30. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

30.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется ***непосредственным интегрированием.***

При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция *«подведения под знак дифференциала»*):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$
$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$
$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$
$$\cos u\, du = d(\sin u),$$
$$\sin u\, du = -d(\cos u),$$
$$\frac{1}{u}\, du = d(\ln u),$$
$$\frac{1}{\cos^2 u}\, du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u)\,du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

1) $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$ (формула 2 таблицы интегралов);

2) $\int (3x-1)^{24}\, dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^{24}\, d(3x-1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$ (формула 1);

3) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$ (формулы 10 и 1);

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}\cdot x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}\cdot x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} + C$ (формула 13);

7) $\int \operatorname{tg} u\, du = \int \frac{\sin u\, du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (вывод ормулы 7);

30.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т. е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем ***формулу интегрирования подстановкой***

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.} \qquad (30.1)$$

Формула (30.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда $\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$, где $t = \varphi(x)$. Другими словами, формулу (30.1) можно применять справа налево.

Пример 30.2. Найти $\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx$.

❍ Решение: Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2+3$, $dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x\cdot\sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3)\cdot t\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int (t^4+3t^2)\,dt = 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 6\cdot\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \quad ●$$

Пример 30.3. Получить формулу

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C.$$

❑ Обозначим $t = \sqrt{u^2+a^2} + u$ (подстановка Эйлера). Тогда

$$dt = \frac{2u}{2\sqrt{u^2+a^2}}\,du + du, \quad \text{т. е.} \quad dt = \frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du.$$

Отсюда

$$\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{dt}{\sqrt{u^2+a^2}+u} = \frac{dt}{t}.$$

Стало быть,

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C. \quad ■$$

30.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.}$$

Полученная формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахождения v и du, используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\cdot\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$. Удобно положить $P(x)\,dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$, где a и b — числа. За u можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 30.6. Найти $\int(2x+1)e^{3x}\,dx$.

Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = 2x+1 & \Longrightarrow & du = 2dx \\ dv = e^{3x}\,dx & \Longrightarrow & v = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$ (можно положить $C = 0$). Следовательно, по формуле интегрирования по частям:

$$\int(2x+1)e^{3x}\,dx = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2\,dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \quad \bullet$$

Пример 30.7. Найти $\int \ln x\,dx$.

Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = \ln x & \Longrightarrow & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & \Longrightarrow & v = x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\cdot\ln x - x + C. \quad \bullet$$

Пример 30.8. Найти $\int x^2e^x\,dx$.

Решение: Пусть $\left[\begin{array}{lcl} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array}\right]$. Поэтому

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int e^x\cdot x\,dx. \qquad (30.2)$$

Для вычисления интеграла $\int e^x x\,dx$ снова применим метод интегрирования по частям: $u = x$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow du = dx$, $v = e^x$. Значит,

$$\int e^x\cdot x\,dx = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C. \qquad (30.3)$$

Поэтому (см. (30.2)) $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2(x\cdot e^x - e^x + C)$. $\bullet$